A határérték szemléletes jelentése

Írta: Borvíz Endre

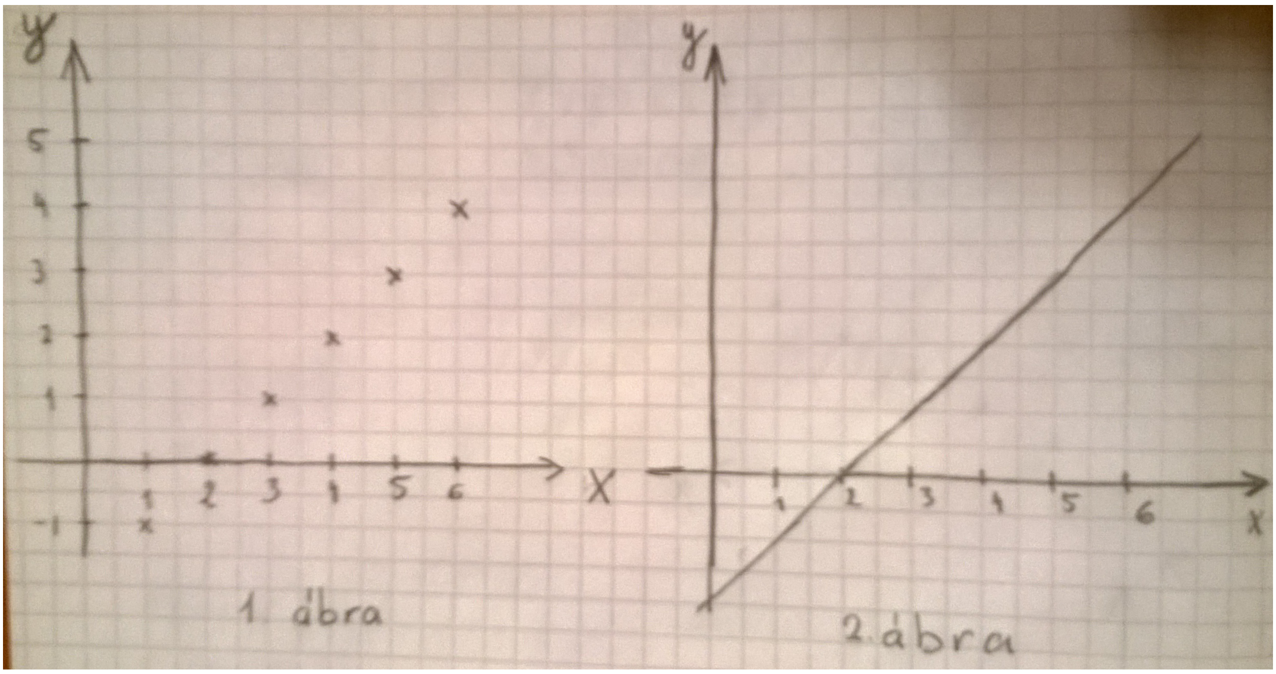
Bevezető

Ebben a rövid jegyzetben szeretnék segíteni az olvasónak, hogy könnyebben megtudjon érteni egy matematikai fogalmat az úgynevezett határértéket. Sokszor okoz problémát, hogy valaki érti, hogy kell kiszámítani a határértéket, ismeri a definícióját is, azonban a pontos jelentésével, nincs teljesen tisztában csupán bemagolta a definíciót vagy esetleg van valami fogalma a jelentéséről, de nem egészen tudja meghatározni mi is pontosan a határékét. Pedig a hátérérték az analízis alapja, erre épül a deriválás és az integrálszámítás ezzel együtt közvetve a differenciál és integrál egyenletek, valamint a vektoranalízis legfontosabb fogalmai például a divergencia, rotáció ami nélkülözhetetlen a fizikát jobban megérteni akaróknak például a Maxwell egyenletekhez. Ezért is jó, ha tisztában vagyunk a szemléletes jelentésével is, ezt – a tapasztalataim alapján – példákon és rajzokon keresztül sokkal könnyebb megérteni. A jegyzetnek nem célja tehát bemutatni a határérték kiszámítását arról fellehető egy rakás típus feladat az interneten. Valamint nem célom a határértékhez tartozó extra fogalmakat amiket együtt szoktak venni a tankönyvek és a hozzátartozó tételeket bemutatni mint például a monotonitás, korlátosság fogalmát vagy mondjuk Bolzano-Weirstrass tételt. Arról is fellehető rengetek segédanyag az interneten, könyvekben. Ennek a jegyzetnek annyi a célja, hogy egy rövid személetes alapozást nyújtson első-, esetleg másodéves egyetemista hallgatóknak vagy középiskolásoknak akik ismerkednek a határérték fogalmával. Éppen ezért ahol csak tudtam, kerültem a matematikai definíciókat vagy – amennyire csak lehetséges volt – a legegyszerűbb alakban írtam fel őket. Remélem hasznosnak tartja majd az olvasó, és tudok vele segíteni. Lássunk is hozzá!

Sorozatok határértéke

Érdemes előbb a sorozatok határértékével kezdeni, majd rátérni az úgynevezett valós függvények határértékére. Ennek oka, magából a sorozat jellegéből következik, ilyenkor elég csupán az y tengelyre „figyelni” amikor definiáljuk a határérték fogalmát. (Erre majd még visszafogok térni a későbbiekben, de látni is fogjuk). De tisztázzuk mi is az, hogy sorozat? Először matematikailag aztán szemléletesen.

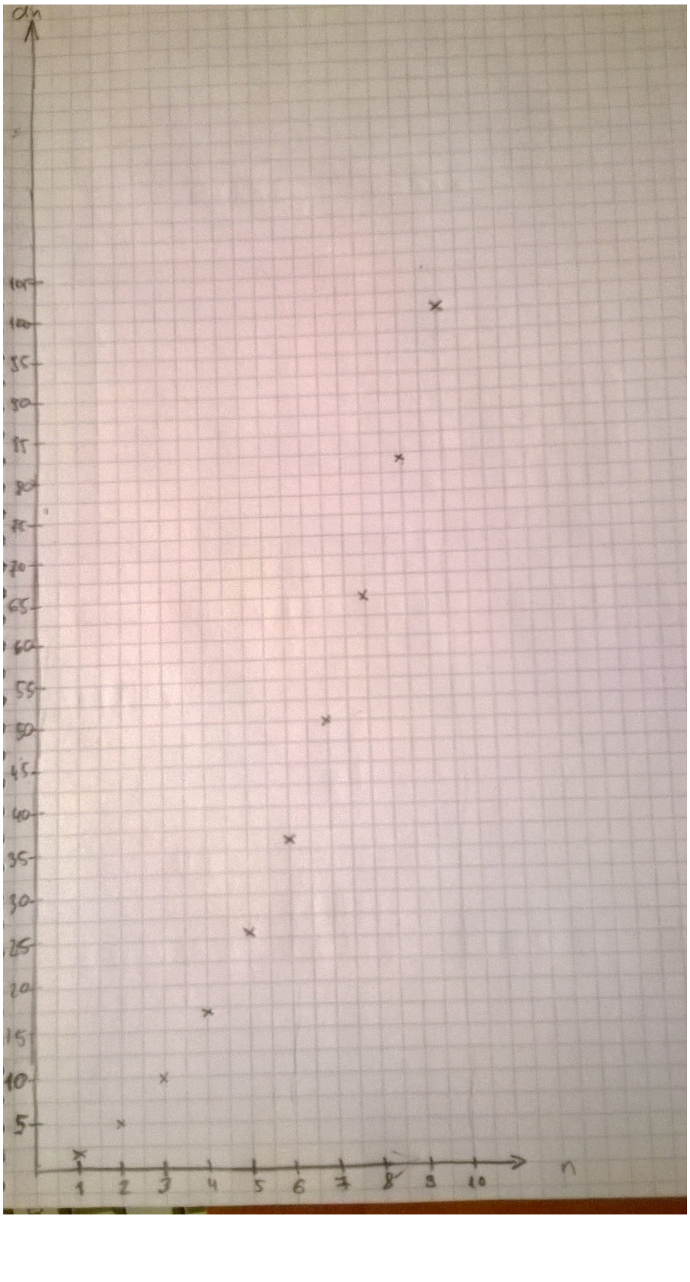
Definíció: A sorozat olyan függvény aminek az értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza.
Mit is jelent ez? Olyan számokhoz amik pozitív egész számok (tehát 1,2,3,4,5,6,7… és a 0 nincs benne) hozzárendelünk számokat (nem feltétlenül egészeket pl. 1-hez hozzárendeljük 0,25 a 2 hozzárendeljük a 0,5). Ha a gimnázium és általános iskolából ismert x-y grafikonon ábrázolunk egy sorozatot (vagy másik néven számsorozatot) és egy valós függvényt akkor valami ilyesmihez jutunk lásd az **1.ábrát** ezt vessük össze a **2.ábrával** ahol egy valós függvényt ábrázoltam.



Az ábra csak szemléletes azt próbálom érzékeltetni vele, hogy a számsorozatnak az x tengelye nem folytonos ellentétben a valós függvényekkel (FIGYELEM! A VALÓS FÜGGVÉNYBEN IS ELŐFORDULHATNAK SZAKADÁSOK! Lásd később!)
Nézzük meg konkrétan pár esetben, hogy kell megrajzolni, a számsortatokat (mert szükségünk lesz a feladatok megoldása során). Jelöljük a továbbikban a_n . És amikor megadjuk a sorozatot az n betűt fogom használni a megadására. Hasonlóan, mint a valós függvényeknél az x-et. Például $f(x)=x+2$ itt pedig $a_n=n+2$.
Ábrázoljuk tehát a következő sorozatot $a_n=n^2+1$
Írjuk fel a függvényekre használt táblázatot és töltsük ki tehát az n-et először emeljük négyzetre majd adjunk hozzá egyet például n= 1 az 1*1+1=2, az n=2 2*2+1=5, az n=3 pedig 3*3+1=10 stb. Lásd a táblázatot 1-10-ig

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2+1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101

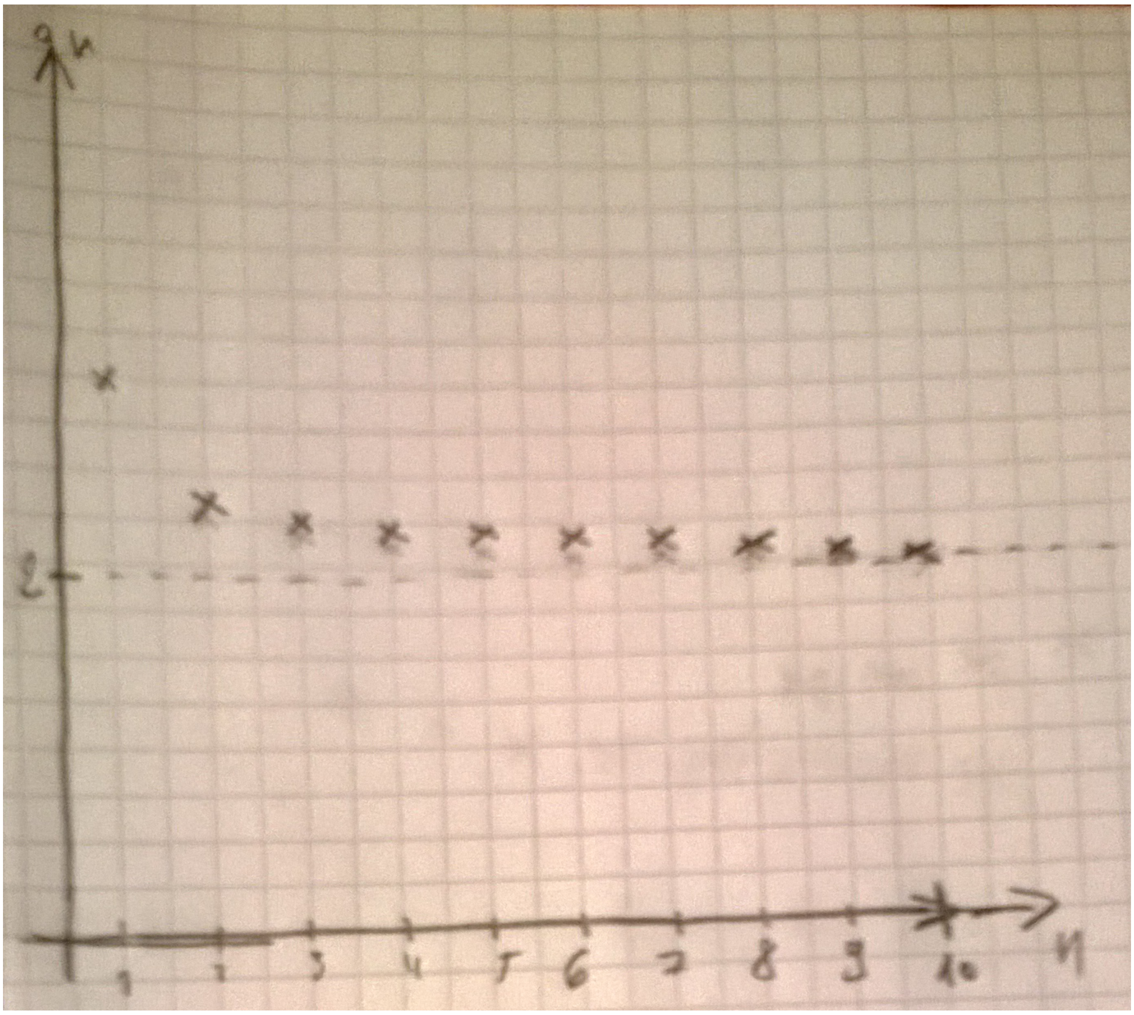
Így most kaptunk egy táblázatot (idegenszóval egy mátrixot) ábrázoljuk őket koordináta rendszerben.



Most nézzünk meg még két példát a gyakorlás és a szemlétesetég miatt legyen a következő $a_n = \frac{1}{n} + 2$. Ennek a táblázata a következő, mivel 1-nél (1/1)+2=3, 2-nél (1/2)+2=2,5; 3-nál pedig (1/3)+2=2,33.., 4-nél: (1/4)+2=2,25 stb.
Táblázatba foglalva 10-ig.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{n}+2$	3	2,5	2,33..	2,25	2,2	2,166..	2,14	2,125	2,11..	2,1

Ezt ábrázolva pedig így néz ki a sorozatunk:



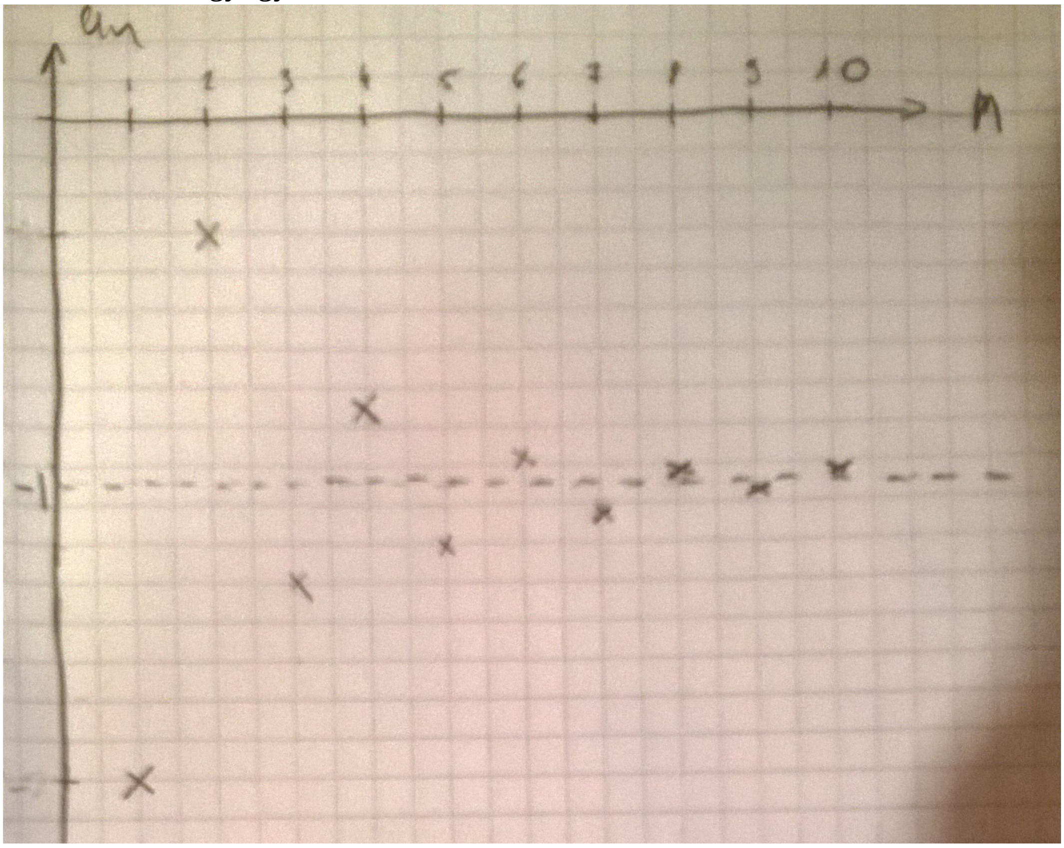
A táblázat alapján látszik, hogy egyre jobban közelítenek a pontok 2-höz, ha tovább ábrázolnánk őket még közelebb kerülnének a 2-höz, úgyis mondhatjuk torlódnak, de nem érnék el azt. Pl 100-nál: (1/100)+2= 2,01; 1000-nél: 2,001. Ez a későbbiekben még nagyon fontos lesz, mert ez alapján a tulajdonság alapján lehet megérteni mi is az a torlódási pont, amiből már csak egy lépés a határérték fogalmának a megértése.

Most pedig nézzünk meg még egy sorozatot: $a_n = \frac{(-1)^n}{n} - 1$ ez pedig eszerint fog alakulni.

1-nél:$((-1)^1/1)-1 = -2$; 2-nél: $((-1)^2/2)-1= -0,5$; 3-nál $((-1)^3/3)-1=-1,33..$; 4-nél. $(-1^4/4)-1= -0,75$; 5-nél $(-1^5/5)-1=-1,2$; Táblázatban:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{(-1)^n}{n}-1$	-2	-0,5	-1,33...	-0,75	-1,2	-0,833...	-1,142	-0,875	-1,11..	-0,9

Ábrázolva tehát valahogy így néz ki.

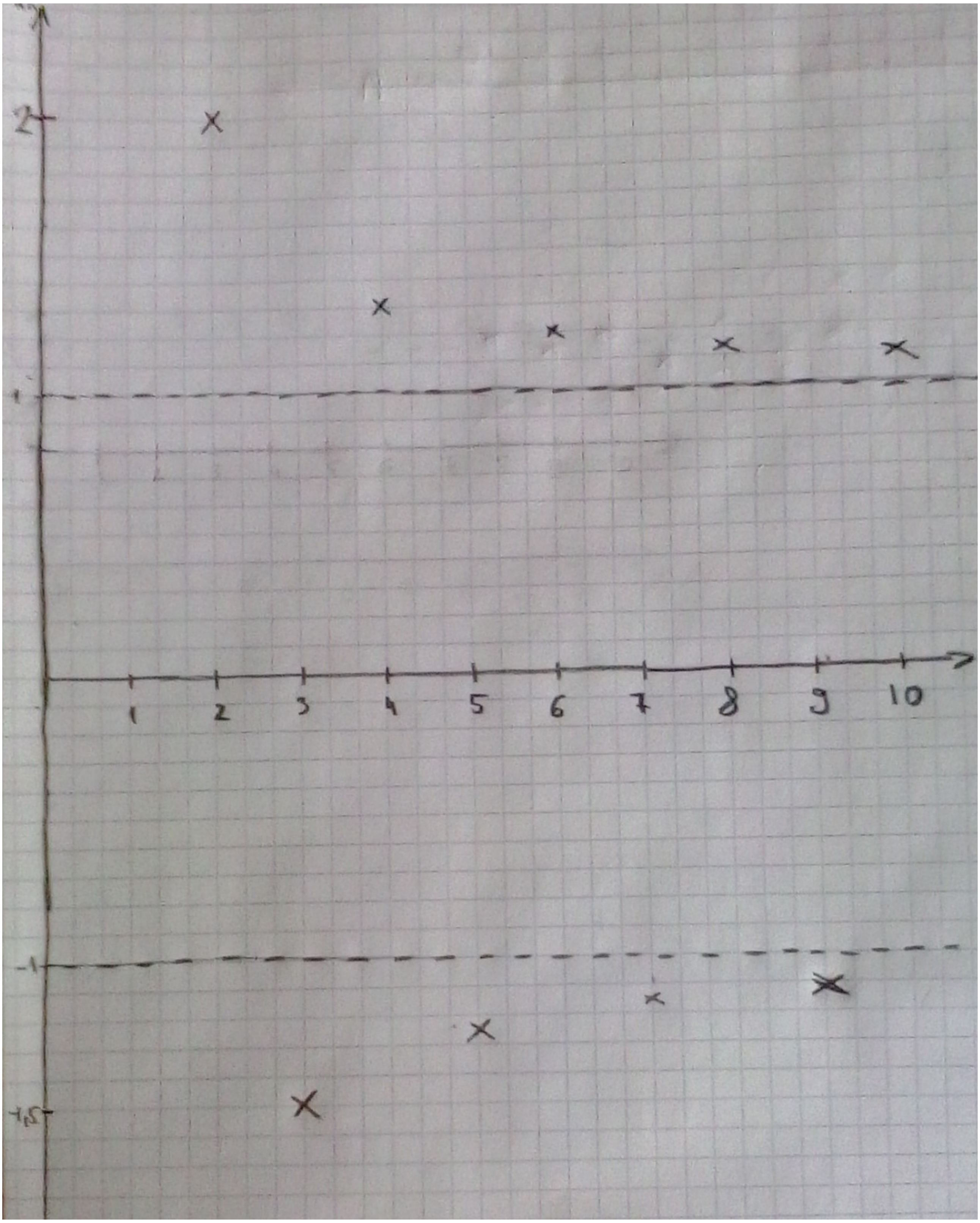


Ezen is jól látható, hogy ez is egyre inkább megközelít egy számot, mégpedig a -1-et, csak ez „két” irányból (felülről és alulról) közelíti meg egyre jobban, nem úgy mint $a_n = \frac{1}{n} + 2$ a sorozat.

Még egy utolsó példa:

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{n-1}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_n = \frac{(-1)^n n}{n-1}$	2	-1,5	1,3	-1,25	1,2	-1,166..	1,14	-1,125	1,1..

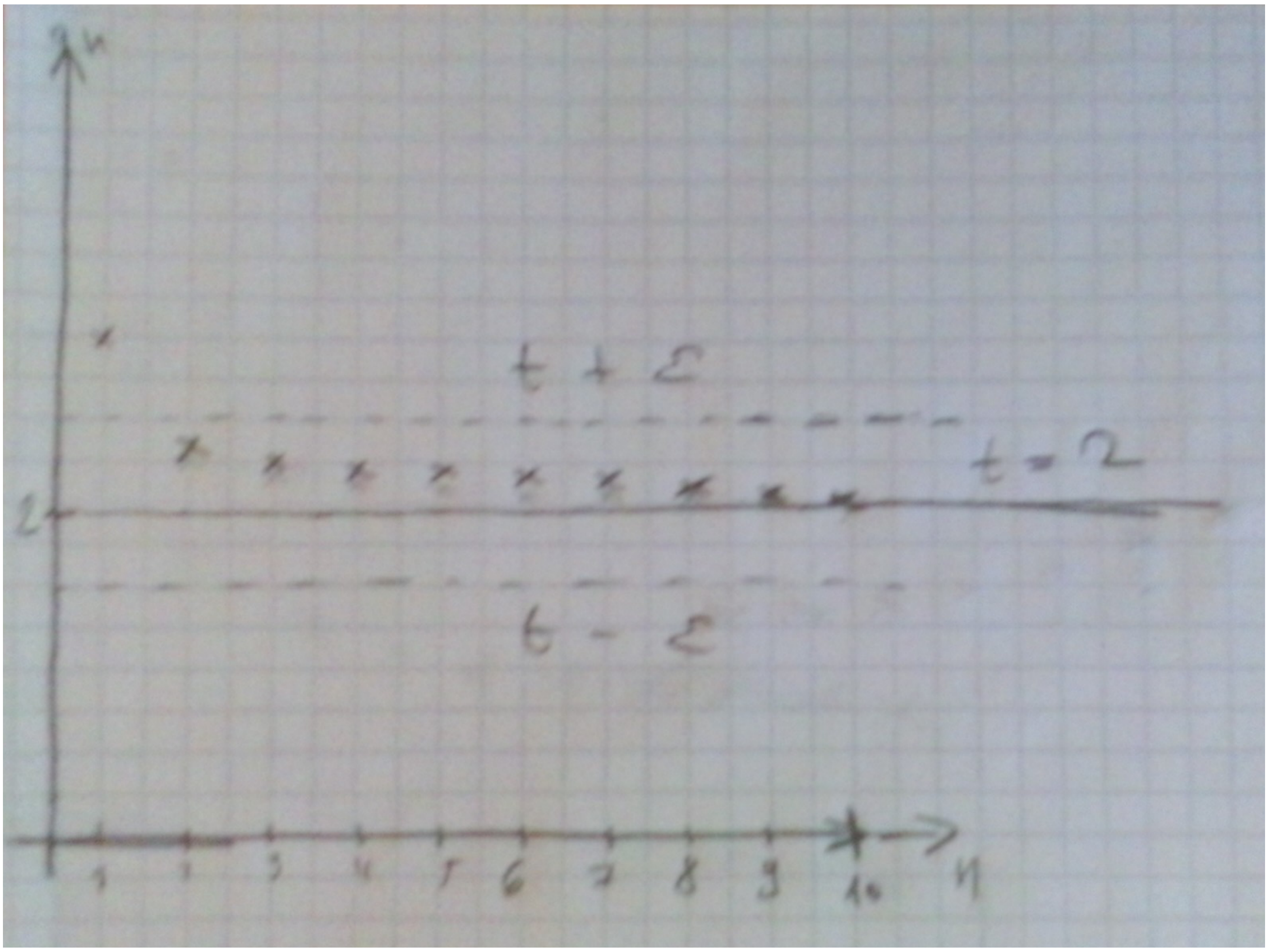


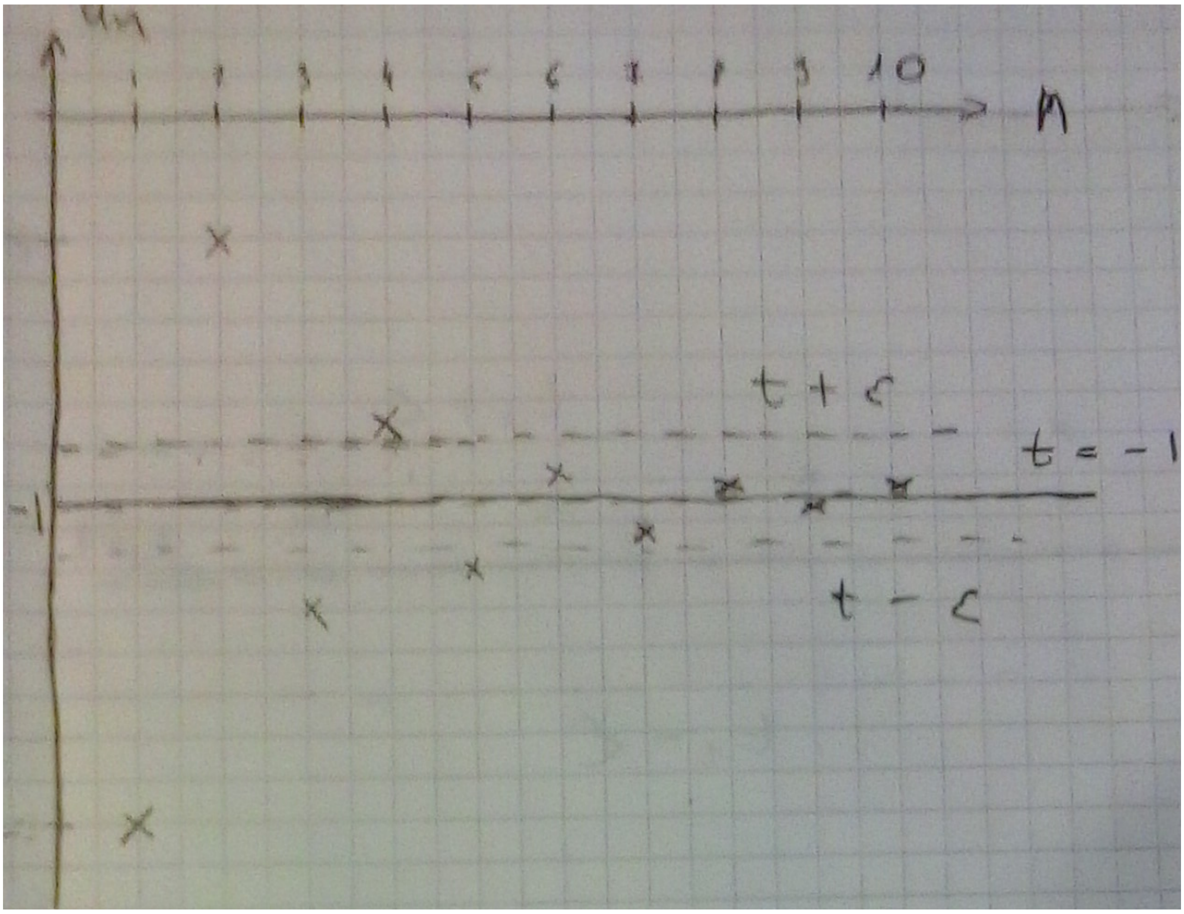
Az 1-et szándékosan kihagytam, mivel ott nincs értelmezve a sorozat
Ennél jól látható, hogy szintén „torlódik”, ráadásul ez kettő számot is a +1-et és a -1-et.
Na most pedig elemmezük a példáinkat a szerint, hogy melyik „torlódik” meg egy számot úgymond melyik torlódik. Az első példát leszámítva mind a három. Azokat és azokat a számokat az y tengelyen amelyekhez torlódnak nevezzük a sorozat torlódási pontjainak. Következzék egy definíció.

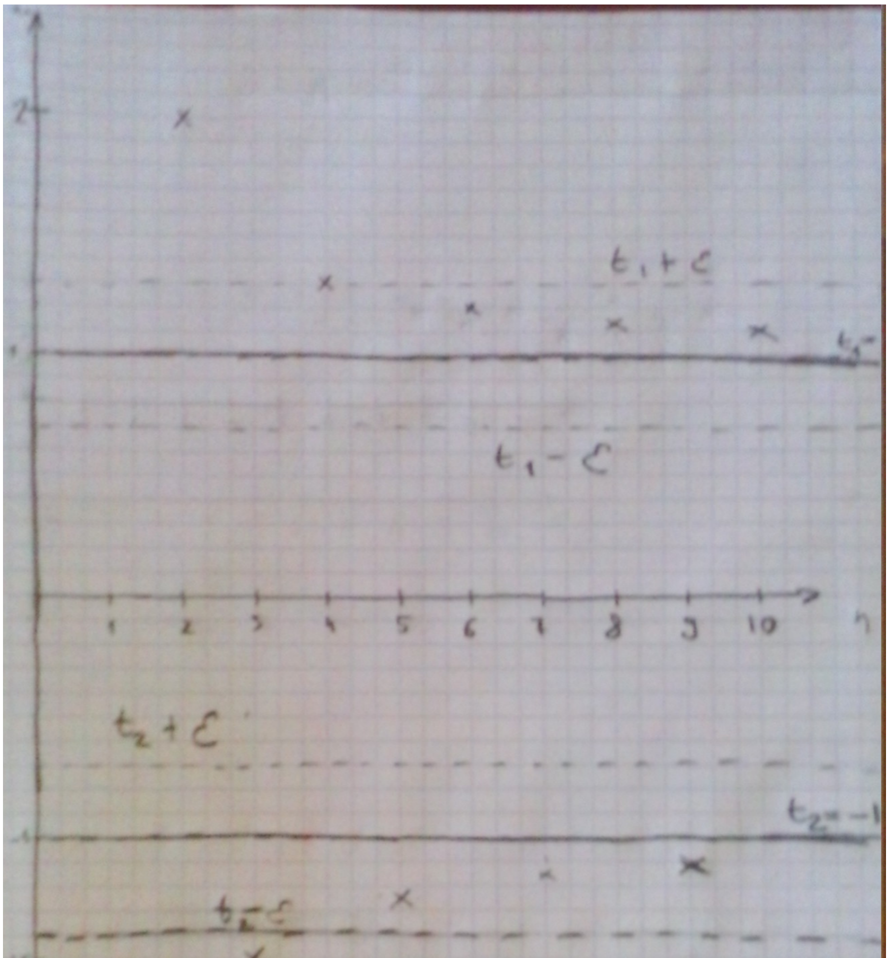
Definíció: A sorozat (a_n) torlódási pontja azt a véges számot (jelöljük t-vel) tekintjük, ha akármilyen kis környezetében (jelöljük: ε) végtelen sok eleme van a sorozatnak.

Jelben: Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mellet, végtelen sok a_n elemre teljesül ez az egyenlőtlenség
$| a_n - t | < \varepsilon$

Tehát mit is jelent ez, szemléltessen?
Az ε a nullánál nagyobb valós számokat jelöli (pl. 0,001..0,16 stb.) amiket korlátoknak használunk.
Az $| a_n - t | < \varepsilon$ ha felbontjuk és elvégezzük az algebrai átalakításokat ehhez fogunk jutni
$-\varepsilon + t < a_n < \varepsilon + t$ amit intervallumban jelöve] t-ε , t+ε [. Jelöljük, be a „t”-ket a három sorozatnál egy félszakasszal és jelöljük be a hozzájuk tartozó ε korlátokat (én szagtatot vonallal tettem). Íme:




u_n
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
n
$t+\varepsilon$
$t=-1$
-1
$t-\varepsilon$


2
$t_1+\varepsilon$
$t_1-\varepsilon$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
n
$t_2+\varepsilon$
$t_2=-1$
$t_2-\varepsilon$

Itt láthatóak, hogy a „t”-k körül torlódnak a sorozat pontjai (elemei) és az ε akármilyen össze lehetne csukni ugyan úgy végtelen sok pont lenne „t” körül, ha tovább rajzolnánk a számegyenest, valamint a pontok egyre közelebb kerülnének a „t”-hez de sosem érnék el.
Ezt jelenti szemléletesen a torlódási pont definíciója.

Feladatok

Ábrázoljuk a következő sorozatokat, rajzoljunk fel hozzájuk egy tetszőleges szélességű ε és a hozzájuk tartozó torlódási pontokat olvassuk le, amennyiben vannak neki. (megoldások a pdf vége felé)
Figyelem!!! Ezt a fajta torlódási pont keresési eljárást, nem biztos, hogy elfogadják a vizsgán, zh-kon!! Ez csupán a szemléletesség még jobban történő begyakorlása miatt van!

1. $a_n = \frac{1}{n+1}$

2. $a_n = (-1)^{-1}(3+\frac{1}{n})$

3. $a_n = n+3$

4. $a_n = n^3$

Miután feldolgoztuk a fentiket következhet, maga a határérték, ami nagyon hasonló lesz az a torlódási pont fogalmához.
Először nézzünk egy percíz a definíciót.
Figyelem ezt a definíciót általában nem fogadják el a vizsgán vagy a zh, ha nem definiáljuk előtte a torlódási pont fogalmát!!!

Definíció: A sorozat akkor van véges határértéke, ha csak egyetlen torlódási pontja van és ez a pont a sorozat határértéke. Ekkor azt, mondjuk, hogy a sorozat konvergens (összetartó). Ha nincs neki vagy pedig több torlódási pontja is van akkor azt mondjuk, hogy a sorozat divergens (széttartó).

Vagyis, ha a sorozatnak csupán egyetlen torlódási pontja van akkor az a pont a határértéke! Ilyenkor a sorozat konvergensnek mondjuk. Ilyen például amiket rajzoltunk azok közül a $a_n = \frac{1}{n}+2$ aminek a határértéke: 2 és a $a_n = \frac{(-1)^n}{n} - 1$ aminek -1. Viszont a divergens sorozat és a határértéke +∞ ezt úgy mondjuk, hogy a végtelenhez tart a sorozat vagy divergál a végtelenbe (ha kibővítettük a vallószámokat +∞-nel akkor úgy is mondhatjuk a végtelenbe konvergál).
A sorozat szintén divergens mivel kettő torlódási pontja is van $a_n = \frac{(-1)^n n}{n-1}$ vagyis nincs határértéke, hanem torlódási pontjai vannak.

Ha ezeket sikerült megértenünk, nézzünk meg a klasszikus definícióját a sorozat határétekének, hogy kitudjuk hagyni a definícióból a torlódási pont fogalmát.
Ez szokott általában a diákoknak, hallgatóknak fejfájást gondot okozni.

Definíció: Az a_n sorozat határértékének azt a véges „A” számot tekintjük, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ létezik olyan $N \in \mathbb{Z}^+$ küszöbszám, hogy minden $n > N$ esetén teljesül az $|a_n - A| < \varepsilon$ egyenlőtlenség.

Ez tehát a definíciója.
Nézzük akkor mi mit jelent pontosan. Az ε itt is egy nullánál nagyobb valós számot jelöl, mint a torlódási pontnál. A kis n betű jelöli az a_n sorozat n-edik elemét amit tetszőlegesen választunk.

Tehát ha például az $a_n = n^2 + 1$ akkor annak az első eleme a_1 ami = 2 a második elem a_2 = 5 és így tovább, lásd a táblázatában fent.
Az | a_n - A| < ε pedig szintén fel lehet bontani, ahogy a torlódási pontnál tettük csak itt t betű helyett A betűt írunk. Így: – ε + A < a_n < ε + A másképpen felírva pedig így] A-ε , A+ε[
A N küszöbszám, több magyarázatra szorul: egy pozitív egész számot jelent, tehát egy nullánál nagyobb egész számot (pl. 1,2,3,.. stb.) olyat amit ha beírunk az a_n sorozat indexébe akkor kapunk egy a_N amihez tartozik egy ε is úgy, hogy az a_N nagyobb indexű sorozat elemek fognak „beleesni” az] A-ε , A+ε[intervallumba. Tehát például nézzük az $a_n = \frac{1}{n} + 2$ legyen N=6 akkor a_6 =2,16.. az ehhez tartozó ε pedig 0,16 (az ε kiszámítási módját itt most nem tárgyalom, mert lényegtelen a szemléletesség megértésnek a szempontjából, annyit mondhatok, hogy ebből következik | a_n - A| < ε) ebben az esetben az a_7 , a_8 , a_9 fog bele tartozni az] A-ε , A+ε[intervallumba, ami]2-0,166.. , 2+0,166..[tehát]1.833.., 2.166..[vagyis 1,833 és a 2,16 közötti számok. És ha megnézzük még egyszer a táblázatát abból látszik is ez, hogy az a_6 még pont nincs benne az intervallumban valamint az a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 sincs benne. Viszont az $a_{7,} a_8, a_9, a_{10}$ (és az a_{11}, a_{12}, a_{13} stb.) igen.

a_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{1}{n}+2$	3	2,5	2,33..	2,25	2,2	2,166..	2,14	2,125	2,11..	2,1

(Azért nincs benne az a_6 =2,166 mivel nyitott intervallumról van szó]1,833…, 2,166...[akkor lenne benne ha zárt lenne jobb oldalról az intervallumunk]1,833…, 2,166…] aki nem érti, vagy nem emlékszik az intervallumok fogalmára annak érdemes utána olvasnia gimnázium első osztályos matematikai tananyagai között a halmazokkal együtt szokták venni)
Nézzünk még egy példát legyen most N=4 vagyis a_4 és az indexű elemek az ehhez tartozó ε pedig 0,25 helyettesítsünk be a] A-ε , A+ε[ami]2-0,25, 2+0,25[tehát ez]1,75 2,25[
Látható megint a táblázatból hogy az a_4 és az az alatti elemek megint nincsenek benne az intervallumban. Viszont most az $a_5, a_6, a_7, a_8 stb.$ benne vannak. Nézzünk még egy utolsó példát legyen N=8 a_8 = 2,125 az ehhez tartozó ε=0,125 helyettesítsünk be ugyan úgy az intervallumba, ekkor kapjuk azt, hogy]1,875; 2,125[itt is látható, hogy a_8 és az az alatti indexű elemek nincsenek benne az intervallumban ellenben $a_9, a_{10} stb.$ igen.
Nézzük meg most az N nagysága szerint sorrendben az intervallumainkat és a hozzátartozó ε-okat.

N	ε	intervallum	Intervallum szélessége
4	0,25	]1,75; 2,25[	0,5
6	0,16...	]1,83; 2,16[	0,33..
8	0,125	1,875; 2,125[	0,25

Az intervallum szélességéhez úgy jutottam, hogy az intervallum jobb oldalából kivontam az intervallum baloldalát, ez pont annyi mint az ε kétszerese.
Látható a táblázatból, hogy ha növeljük az N-t úgy kezd el mind az ε, mind az intervallum és mind az intervallum szélessége zsugorodni. Szóval megállapíthatjuk, hogy az N tulajdonképpen azt a célt szolgálja, hogy csökkenteni kezdje az intervallum szélességét és az ε amellett, hogy | a_n - A| < ε a sorozat minden a_N elemére teljesüljön.

Szóval egyszerűbben: Megállapíthatjuk, hogy a sorozat határértéke: Egy olyan véges szám aminek akármilyen kis környezete a sorozatnak majdnem minden elemét tartalmazza!!!

Jelölni pedig így szoktuk $\lim a_n = A$ vagy $\lim_{n \to \infty} a_n = A$ vagy pedig $a_n \to A$

Ennyi lett volna, a sorozat határértéke.

Gyakorlások

5.
Állapítsa meg az **1**, **2**, **3**, **4** feladatnak a határértékeit (amennyiben van neki) a rajzaik alapján és döntse el, hogy divergens-e vagy konvergens-e a sor.

Itt is igaz, hogy ezt a fajta megoldását a határérték kiszámításának, nem fogadják el általában a zh-n vagy a vizsgákon, csupán a szemléletesség miatt van!!!

Függvények határértéke

Az eddigiek során, mindig a végtelenbe vizsgáltuk a határértéket ($n \to \infty$) Most megfogjuk vizsgálni valós függvényeknél (továbbiakban jelöljük f(x)), ha egy adott pontnál nézzük a határértéket $x \to x_0$. (Lehet végtelenben is vizsgálni, de ez most felesleges a formális megértés szempontjából) Mielőtt ráértenénk nézzük meg mi is az, hogy valós függvény.

Definíció: Legyen U az $\mathbb{R}$ egy részhalmaza azt mondjuk f(x) valós függvény ha értelmezési tartománya az U.

Ez annyit jelent, hogy a $\mathbb{R}$-ből kiválasztunk egy részhalmazt, ez lesz a függvény értelmezési tartománya (amit az x tengelyen szoktunk ábrázolni, általában). Lásd a **2.ábrát** fentebb.

Függvény hátérérteke

Formális definíció
Először szemléletesem
(Talán mondanom sem kell, hogy ezt nem szokták elfogadni a ZH-n általában):
Legyen x_0 egy nyílt intervallum egy pontja és tegyük fel, hogy az f(x) függvény értelmezve van ezen az intervallumon, kivéve esetleg magát az x_0 helyet. Ha az f(x) függvényértékek tetszőlegesen közel kerülhetnek egy A számhoz, amennyiben az x értékek eléggé megközelíthetik x_0 -t, akkor azt mondjuk, hogy f(x) az L számhoz tart, miközben x tart x_0 -hoz; ezt gyakran úgy fejezzük ki, hogy f(x) határértéke az x_0 pontban L. Azt, hogy f határértéke az x_0 helyen A.

jelöljük: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

Tehát veszünk egy x_0 pontot (itt értelmezve kell, hogy legyen a függvény, tehát nem lehet olyan hogy szakadási pont van, kivéve az x_0) és a környezetében elkezdünk behelyettesíteni x-eket. Ahogy x_0 -hoz egyre közelebb eső x-eket kezdünk el behelyettesíteni a függvénybe az x-ekhez tartozó akkor az f(x) függvényérték az y tengelyen egyre közelebb kerül az x_0 A számhoz. De soha nem fogják elérni az f(x) függvényértékek az A-t mivel az x is csak közelíti az x_0 -t de soha sem lehet egyenlő vele. x_0 = x **EZ SOHA SEM teljesülhet!!! Ugyan úgy mint ahogy a torlódási pontnál sem állhatnak rá a sorozat elemek magára a torlódási pontra csak egyre**

közelebb kerülnek hozzá. Ugyan ez történik itt is, f(x) függvényértékek is csak egyre közelebb kerülnek az A-hoz.
Amellett, hogy x is egyre jobban megközelíti az x_0 -t.

(Ezért lehet „elvégezni” például olyan műveletek határérték számításnál amit nem lehet elvégezni a hagyományos algebrával. Bár itt sem végezzük el. Például ezért lehet 0-val osztani vagy végtelennel. Valójában nem osztunk vele csak közelítünk és mivel minket maga az A érdekel azt állapítjuk, meg hogy mennyi az A az adott helyen.)

Nézzük meg egy példával:

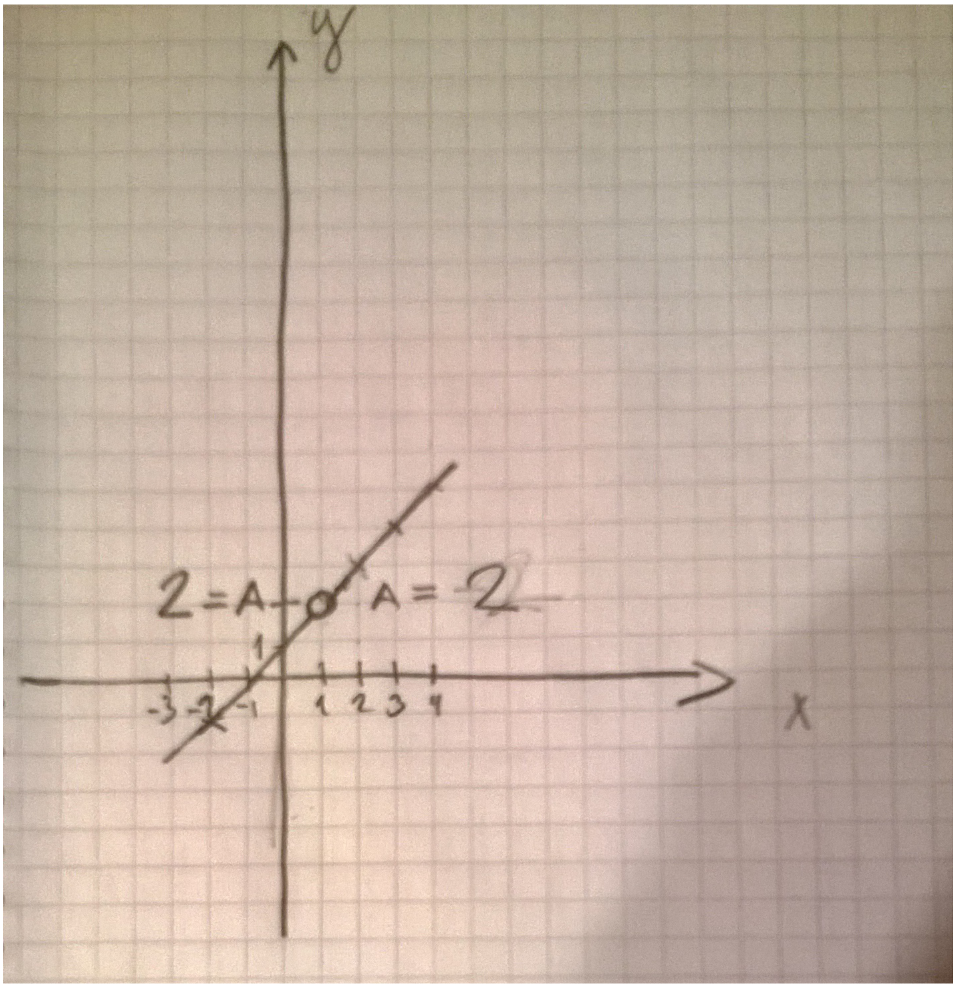
Legyen $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ azt középiskolából tudjuk, hogy az $x \neq 1$.

Viszont kíváncsiak vagyunk mennyi a határértéke az $x_0=1$ helyen. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Írjunk hozzá táblázatot és kezdjük el közelíteni az 1-et (Figyelem itt is áll, hogy ez csupán a szemléletesség miatt van, hogy így oldom meg a feladatot)

x	1,5	1,3	1,2	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$	2,5	2,3	2,2	2,1	2,01	2,001	2,0001

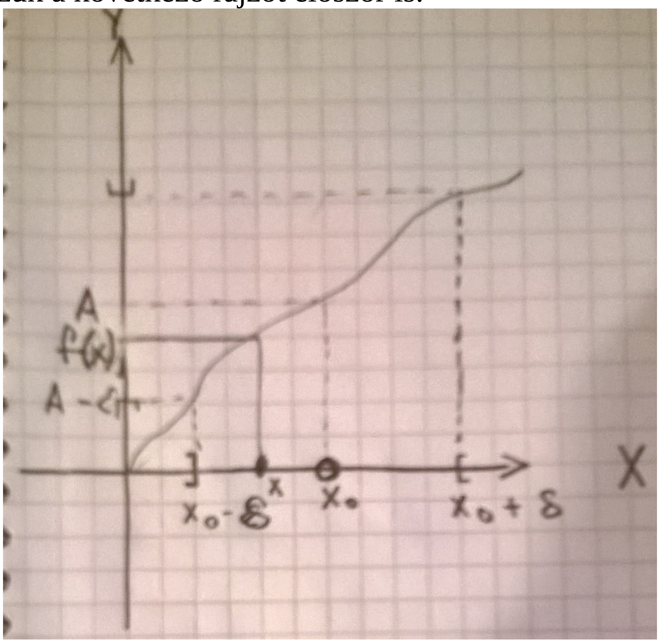
Szinte érezzük, hogy a határérték 2 lesz az $x_0 = 1$ pontban. Rajzzal:



Az üres kör a szakadási pontot jelöli, mivel ott nincs értelmezve a függvényérték.

Feladatok
Állapítsuk meg a következő függvényeknek a határértékeit, a fenti táblázatos módszerrel.
Ha szükségesnek érezzük rajzoljuk is le és ábrázoljuk a szakadási pontokat .
6. $\lim_{x\to -1} x+2$

7. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2}{x-2}$
Precíz definíció
Definíció: Az f(x) függvénynek a határértéke az x_0 helyen az az „A” szám, ha bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik egy $\delta \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy ha $0 < | x-x_0 | < \delta$ akkor $|f(x)-A| < \varepsilon$
Jelölése:
$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

Mit is jelent ez?
Tulajdonképpen semmi újat amit már nem vettünk volna az előzőekben.
Nézzük a következő rajzot először is.


Azt jelenti, hogy adott egy x_0 pont az x tengelyen és egy hozzátartozó A az y. Az x_0 -nak van egy δ sugarú környezete (sugara), ami nyílt intervallum és az y tengelyen is van az A-nak egy nyílt ε sugara. Tetszőleges x-eket választhatunk δ környezetében amivel közelíthetjük az x_0 -t egyre jobban. Azonban semmi sem garantálja azt, hogy a függvénynek x_0, helyen valóban az A-hoz a határértéke ha x-el elkezdünk közelíteni az x_0 hoz. Ha azt akarjuk belátni, hogy x_0 helyen valóban a függvény határértéke van azt kell bebizonyítani, hogy az f(x)-A távolsága (ez |f(x)-A|) tetszőlegesen megközelítheti a 0-át (össze lehet zsugorítani az intervallumot az y tengelyen), ha x is eléggé megközelíti az x_0, de nem lesz soha egyenlő vele (az x tengelyen is összelehet zsugorítani az intervallumot). Ezért van szükség a definícióban erre az összefüggésre: $0 < | x-x_0 | < \delta$ akkor $|f(x)-A| < \varepsilon$

Utószó
Ennyi lett volna. Ne feledjétek ez csupán egy alapozása volt, rengeteg dolog hiányzik belőle a sikeres vizsgához. Csupán a kezdő lökést adja meg,hogy ne menjen el túl sok idő a definíciókra. Ha kérdésetek van, vagy hibát találtatok a jegyzetben kérlek feltétlenül jelezzétek.

Megoldások

1. $t=0$
2. $t_1=3$, $t_2=-3$
3. nincs neki
4. nincs neki

5.
1. konvergens határértéke 0
2. két torlódási pontja is van, tehát divergens nincs határértéke
3. végtelen a határértéke, tehát divergens
4. szintén végtelen határértéke tehát ez is divergens

6. határérték 1 (nincs szakadási pont)
7. határérték 4 (van szakadási pont)

Források

[1] Obádovics j. Gyula-Szarka Zoltán Felsőbb matematika
[2]Obádovics J. Gyula Matematika
[3]Thomas féle Kalkulus I.